Mehhaanikakursuse raudvara

1. Kinemaatika

1.1 Kehade liikumine ajas ja ruumis. Taustsüsteemid.

Mehhaanika uurib kehade liikumist (asendi muutumist) üksteise suhtes ajas ja ruumis. Ruumi üks põhiomadusi on kehadevahelise kauguse (pikkuse) mõõdetavus. Aja vastav omadus on kehadega toimuvate sündmuste vahelise ajavahemiku mõõdetavus. Pikkuse ja aja etalonide areng; pikkuse ja aja mõõtühikud (m, s). Kehade liikumist vaadeldakse suvaliselt valitava taustkeha suhtes. Taustkeha koos selle mingi punktiga seotud koordinaatide süsteemiga (lihtsaim, on ristkoordinaadistik) ja kellaga moodustavad taustsüsteemi.

Keha lihtsaim mudel on punktmass (PM): keha mass loetakse koondunuks ühte punkti. Ristkoordinaadistiku kasutamisel määratakse PM asukoht ruumis kas kolme skalaarse koordinaadiga x, y, z (PM koordinaattelgedel kujutatud projektsioonide kaugused alguspunktist) või kohavektoriga $\vec{r}$ (koordinaatide alguspunktist PM asukohta suunduv sirglõik). Kohavektor avaldub koordinaatide kaudu valemiga: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, kus $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ on koordinaattelgede suunalised ühikvektorid.

PM liikumise kirjeldamiseks peab oskama määrata selle asukohta suvalisel ajahetkel: $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Liikuva PM järjestikuste asukohtade jada määrab selle trajektoori. Skalaarsed seosed $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ on trajektoori parameetrilised võrrandid. Etteantud trajektoori korral on lihtsaim viis PM asukoha määramiseks loomulik koordinaat s: PM kaugus trajektooril suvaliselt valitud alguspunktist, mõõdetuna piki trajektoori. Üks kahest võimalikust liikumise suunast trajektooril loetakse kokkuleppeliselt positiivseks, seega on s märgiga suurus erinevalt läbitud teepikkusest s*, mis on alati positiivne.

1.2 Punktmassi kinemaatika.

Liikumise intensiivsust iseloomustab kiiruse mõiste. PM keskmine kiirus ajavahemikus Δt avaldub nihkevektori $\Delta\vec{r}$ ja Δt suhtena: $\bar{\vec{v}} = \Delta\vec{r} / \Delta t$; $\bar{\vec{v}} \uparrow\uparrow \Delta\vec{r}$. Hetkkiiruse määrab piirprotsess $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta\vec{r} / \Delta t = \dot{\vec{r}}$. Füüsikaliselt lõpmata väikese suuruse mõiste sellistes piirprotsessides. $\vec{v}$ võib tõlgendada kiirusena, millega PM liiguks, kui see antud hetkest hakkaks liikuma ühtlaselt mööda sirget trajektoori; $\vec{v}$ on suunatud mööda trajektoori puutujat antud punktis.

Füüsikalise suuruse dimensioon(valem) on eeskiri selle suuruse mõõtühiku avaldamiseks valitud ühikute süsteemi põhisuuruste ühikute kaudu. Kiiruse dimensioonvalem SI-s: $[v]=LT^{-1}$, ühik SI_v=m/s. L ja T on ühikute süsteemi põhisuuruste pikkuse ja aja dimensioonide tähised.

Kiiruse muutumise kiirust iseloomustab kiirenduse mõiste. Keskmine kiirendus ajavahemikus Δt avaldub kiiruse muudu Δv ja Δt kaudu: $\bar{\vec{a}} = \Delta\vec{v} / \Delta t$; $\bar{\vec{a}} \uparrow\uparrow \Delta\vec{v}$. Hetkkiirendus: $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta v / \Delta t = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$.

$\vec{a} \parallel \vec{v}$ vaid sirge trajektoori korral, kõvera trajektoori korral on $\vec{a}$ pööratud $\vec{v}$ -st kõveruskeskpunkti poole. Kiirenduse dimensioonvalem SI-s: $[a] = LT^{-2}$, ühik SI_a = m s^{-2}. Vektorid $\vec{v}$ *ja* $\vec{a}$ avalduvad projektsioonide kaudu ristkoordinaadistiku telgedel: $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$ ja $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$.

Loomulikus koordinaadistikus saab kiirust ja kiirendust käsitleda ainult skalaarsel kujul. Keskmine kiirus määratakse kas koordinaadi muudu Δs või läbitud teepikkuse s* kaudu: $\bar{v} = \Delta s / \Delta t$ (1) või $\bar{v}^* = s^* / \Delta t$ (2). $\bar{v}$ (*ka* $\bar{v}^*$) saab tõlgendada v lõpmatu hulga väärtuste aritmeetilise keskmisena Δt jooksul. Piirprotsessis $\Delta t \to 0$ annavad mõlemad sama hetkkiiruse, ainult juhul (1) tuleb seda tõlgendada $\vec{v}$ projektsioonina puutujale kui suunatud sirgele (suund määratud liikumise kokkuleppelise positiivse suunaga trajektooril), juhul (2) aga $\vec{v}$ moodulina.

Vektori $\vec{a}$ suunda on sobiv käsitleda trajektoori lokaalses koordinaadistikus, mille telgede siht ja suund määratakse igas punktis puutuja, peanormaali ja binormaaliga (mis need on?). Et $\vec{a}$ asub alati trajektoori kooldumistasandis, siis $a_b=0$ ja $\vec{a}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n=a_\tau\vec{\tau}+a_n\vec{n}$; a_τ on puutujasihiline <u>tangentsiaal-kiirendus</u>, $a_\tau=dv/dt=d^2s/dt^2$ (märgiga suurus), $a_n=v^2/R$; $\vec{\tau}$ ja $\vec{n}$ on nende suundade ühikvektorid, R on trajektoori kõverusraadius. Loomulikus koordinaadistikus saab käsitleda vaid a_τ.

Koordinaadi muut Δs (või Δx, Δy, Δz) ning kiiruse muut Δv (või Δv_x, Δv_y, Δv_z) arvutatakse määratud integraalina: $\Delta s=\int_{t_1}^{t_2} v\,dt, \Delta v=\int_{t_1}^{t_2} a_\tau\,dt$.

1.3. <u>Jäiga keha kinemaatika.</u>

Keha lihtsaim liikumise liik on kulgliikumine: keha kõikide punktide trajektoorid on täpselt ühesugused kõverad (erijuhul sirged), kõik keha punkte ühendavad sirged jäävad iseendaga paralleelseks. Kulgliikumisel on alati kasutatav punktmassi mudel. Keerukamate liikumiste korral kasutatakse jäiga (põhimõtteliselt mittedeformeeritava keha) mudelit. Kulgliikumise järel on jäiga keha lihtsaim liikumine pöörlemine ümber kehas ja välises taustsüsteemis fikseeritud telje: kõikide punktide trajektoorid on ringjooned, mille keskpunktid moodustavad paigalseisva sirge - pöörlemistelje. Pöörlemise intensiivsust iseloomustab <u>nurkkiiruse</u> mõiste. Keskmine nurkkiirus ajavahemikus Δt avaldub keha suvalisest punktist teljele tõmmatud ristlõigu r_n pöördenurga $\Delta\varphi$ kaudu: $\bar{\omega}=\Delta\varphi/\Delta t$. <u>Hetknurkkiiruse</u> määrab piirprotsess $\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\Delta\varphi/\Delta t=\dot{\varphi}$. Ajas muutuva ω muutumise kiirust kirjeldab nurkkiirendus β: $\bar{\beta}=\Delta\omega/\Delta t$; $\beta=\lim_{\Delta t\to 0}\Delta\omega/\Delta t=\dot{\omega}=\ddot{\varphi}$. ω ja β on seotud suvalise punkti kiirusega v ja tangentsiaalkiirendusega a_τ: $v=\omega r_n$, $a_\tau=\beta r_n$. Nurk on dimensioonitu suurus. Nurkkiiruse dimensioonvalem: $[\omega]=T^{-1}$, SI ühik on rad/s; nurkkiirenduse dimensioonvalem: $[\beta]=T^{-2}$, SI ühik on rad/s^2.

Üldjuhul võib pöörlemistelg pöörduda kas ainult välises taustsüsteemis või ka kehas endas, läbides pidevalt keha erinevaid punkte (hetkeline telg). Seepärast tuleb nurkkiirust ja -kiirendust lugeda vektoriteks. Et pöörlemistelg on pöörleva keha olemasoluga määratud sirge, siis on loomulik lugeda see $\vec{\omega}$ sihiks; $\vec{\omega}$ kui pseudovektori suund määratakse kokkuleppeliselt parema käe kruvi reegli abil (kuidas?). $\vec{\omega}$ ja $\vec{\beta}$ on seotud keha suvalise punkti kiiruse ja kiirendusega: $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}_n$, $\vec{a}_\tau=\vec{\beta}\times\vec{r}_n$, $a_n=\vec{\omega}\times\vec{v}$; r_n on selle punkti kohavektor taustsüsteemis, mille koordinaadistiku alguspunktiks on vaadeldava punkti projektsioon teljel.

Jäiga keha liikumine on üldjuhul kulgliikumise ja (mitme samaaegse) pöördliikumise kombinatsioon. Lihtsaim kombinatsioon on <u>tasapinnaline liikumine</u>, mille korral keha kõik punktid liiguvad paralleelsetel tasanditel. Tasapinnalise liikumise näide on <u>pöördkeha</u> (mis see on?) <u>veeremine</u> mingil (erijuhul tasapinnalisel) aluspinnal. <u>Libisemiseta veeremisel</u> on pöördkeha alusega antud hetkel puutuv(ad) punkt(id) aluse suhtes paigal, keha pöörleb ümber sümmeetriatelje, see aga liigub kulgevalt. Pöörlemise nurkkiirus ω ja sümmeetriatelje suvalise punkti (sealhulgas ka massikeskme) kiirus v_c on seotud valemiga $v_c=\omega R$, kus R on pöördkeha ristlõike raadius.

2. Punktmassi ja keha kulgliikumise dünaamika

2.1. <u>Sissejuhatus dünaamikasse. Newtoni seadused.</u>

Kui kinemaatika kirjeldab, <u>kuidas</u> toimub liikumine, siis dünaamika analüüsib, <u>miks</u> liikumine toimub just nii, s.t. siin vaadeldakse liikumise oleku ja selle muutumise põhjusi. Klassikalise e. Newtoni mehhaanika seadused ja võrrandid kehtivad 1)väikestel kiirustel: $v<<c$ (c - valguse kiirus vaakumis), 2) suurte masside korral: $m>>m_p$ (prootoni mass), 3) nõrkades gravitatsiooniväljades.

Kogu klassikaline mehhaanika toetub kolmele Newtoni seadusele. Newtoni 1. seadus traditsioonilises sõnastuses on vaadeldav 2. seaduse erijuhuna. Esimese seaduse tegeliku sisu avab sõnastus: on olemas taustsüsteeme, mille suhtes (teiste kehade mõjust) vaba keha liigub konstantse kiirusega $\vec{v}$ (ühtlaselt sirgjooneliselt). Need on inertsiaalsed taustsüsteemid. Jõud $\vec{F}$ on kehade vastastikust mõju iseloomustav füüsikaline suurus, mass m iseloomustab keha inertsust (vastupanuvõimet jõu kiirendavale toimele). Mass on SI põhisuurus, selle dimensiooni tähis on M. Keha kiirendus on võrdeline jõuga ja pöördvõrdeline massiga (kust see selgub?). Katsetest erinevate kehadega selgub, et jõud muudab otseselt mitte keha kiirust, vaid liikumishulka ehk impulssi: $\vec{p} = m\vec{v}$. Impulsi dimensioonvalem: $[p]=LMT^{-1}$, ühik SI_p=(kg m)/s. Newtoni 2. seadus väidab, et keha impulsi ajalise muutumise kiirus on võrdeline kehale mõjuva jõuga (jõudude vektorsummaga): $d\vec{p}/dt = k\vec{F}_\Sigma$. See valem on ühikute süsteemis SI jõu ühikut defineerivaks seoseks, seega võrdetegur k=1:. $d\vec{p}/dt = \vec{F}_\Sigma$ (1). Jõu dimensioonvalem:$[F]=LMT^{-2}$, SI ühik: SI_F=(kg m)/s^2. Seost(1) nimetatakse dünaamika põhivõrrandiks. Konstantse massi korral: $m\vec{a} = \vec{F}_\Sigma$. Valemist (1): $d\vec{p} = \vec{F}_\Sigma\, dt$, seda korrutist nimetatakse jõuimpulsiks. Punktmassi impulsi muut on võrdne talle üle antud jõuimpulsiga: $\Delta\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_\Sigma\, dt$. Jõuimpulsi dimensioonvalem ja ühik langevad kokku impulsi omadega. Newtoni 3. seadus väidab, et kahe keha vastasmõju jõud on võrdsed, vastassuunalised ja mõjuvad sama sirget mööda: $\vec{f}_{12} = \vec{f}_{21}$. Kehade suhtelise liikumise suure kiiruse korral ei kehti 3. seadus jõudude suuna osas täpselt (miks?).

2.2. Punktmassi koordinaatide teisenemine üleminekul ühest taustsüsteemist teise, esimese suhtes liikuvasse taustsüsteemi. Galilei relatiivsuseprintsiip .

Dünaamikaülesande lahendiks on sageli integraalne liikumise seadus - punktmassi koordinaatide (ja kiiruse) sõltuvus ajast. Ülesanne lahendatakse taustsüsteemis, kus lahenduskäik on lihtsaim, tulemusi on aga sageli vaja kasutada hoopis teises taustsüsteemis, mis võib esimese suhtes ka liikuda. Seose PM ristkoordinaatide vahel kahes teineteise suhtes kulgevalt liikuvas taustsüsteemis annavad Galilei teisendusvalemid, mida saab kirjutada ühe vektorvalemina: $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{u}t + \vec{r}^{\,0}_{O'}$ (1). Siin $\vec{r}$ ja $\vec{r}\,'$ on PM kohavektorid vastavalt paigalseisvaks loetud ja liikuvas taustsüsteemis, $\vec{u}$ on liikuva taustsüsteemi konstantne kiirus liikumatu suhtes, $\vec{r}^{\,0}_{O'}$ on liikuva taustsüsteemi alguspunkti O' kohavektor alghetkel t=0. Mõlema taustsüsteemi kellad näitavad sama aega t, kui nad on eelnevalt sünkroniseeritud. Kahe punktmassi vaheline kaugus on mõlemas taustsüsteemis sama (näidata seda, kasutades valemi (1) projitseerimisel koorinaattelgedele saadavaid skalaarseid seoseid). Punktmassi kiiruste seos kahes inertsiaalses taustsüsteemis ($\vec{u} = const$) – kiiruste liitumise lause saadakse valemi(1) diferentseerimisel aja järgi: $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u}$. Teistkordne diferentseerimine annab $\vec{a} = \vec{a}\,'$, st. keha kiirendus kõigi inertsiaalsete taustsüsteemide suhtes on sama. Siit tuleneb Galilei relatiivsuseprintsiip: dünaamika põhivõrrand kirjutatakse kõikides inertsiaalsetes taustsüsteemides täpselt ühtmoodi, see on invariantne inertsiaalsüstemi valiku suhtes. See tähendab, et ühegi mehhaanikakatsega, mis on tehtud inertsiaalses taustsüsteemis, omamata infovahetuse võimalust teiste taustsüsteemidega, pole võimalik kindlaks teha selle süsteemi kiirust teiste inertsiaalsüsteemide suhtes.

2.3. Impulsi jäävuse seadus. Massikeskme liikumise teoreem.

Mehhaaniline süsteem (MS) on kehade (punktmasside) kogum (n keha), mida antud mehhaanikaprobleemi käsitlemisel on kasulik vaadelda tervikuna. MS impulss on süsteemi kehade impulsside summa: $\vec{p}_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$. MS kehade vahel mõjuvate sisejõudude $\vec{f}_{ij}$ summa on null, seepärast saavad MS impulssi muuta vaid selle kehadele mõjuvad välisjõud, ja süsteemi dünaamika põhivõrrandis ongi ainult need: $d\vec{p}_\Sigma / dt = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$. Siin $\vec{F}_i$ on i-ndale kehale mõjuvate välisjõudude summa. Kui $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$, nimetatakse MS isoleerituks; siis $\vec{p}_\Sigma = const$. Viimane väide on impulsi jäävuse seadus: <u>isoleeritud MS impulss on ajas jääv.</u>

<u>Massikeskme</u> mõiste defineeritakse massijõudude homogeense välja kaudu: see on punkt, kuhu on rakendatud jäiga MS (keha) kõigile (mõttelistele) osadele mõjuvate massijõudude (näit. raskusjõudude) summa. Massikeset saab määrata katseliselt (kuidas?). MS massikeskme C kohavektor arvutatakse valemist $\vec{r}_C = (\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i) / m_\Sigma$, kus $\vec{r}_i$ on i-nda PM (i-nda keha massikeskme) kohavektor ja m_i on selle mass, m_Σ on MS summaarne mass. Viimase valemi vektorite projitseerimisel koordinaat telgedele saadakse skalaarsed valemid massikeskme koordinaatide arvutamiseks.

Süsteemi koguimpulss avaldub massikeskme kiiruse kaudu: $\vec{p}_\Sigma = m_\Sigma \vec{v}_C$. Süsteemi mass oleks nagu koondunud massikeskmesse. Viimase võrduse poolte diferentseerimisel aja järgi saadakse <u>massikeskme liikumise teoreemi</u> nime all tuntud seos: $m_\Sigma \vec{a}_C = \vec{F}_\Sigma$. Siin $\vec{F}_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$. MS massikese liigub nii, nagu oleks sellesse koondunud süsteemi kogu mass ja rakendatud süsteemi kõikidele kehadele mõjuvate välisjõudude summa. Sisejõud ei mõjuta massikeskme liikumist.

2.4. <u>Jõu töö ja võimsus</u>.

Tööd teeb kehale mõjuv jõud ainult keha liikumisel. <u>Töö</u> füüsikaliselt lõpmata väikesel nihkel on füüsikaline suurus, mis on võrdeline kehale mõjuva jõu nihkesihilise projektsiooniga ja nihke mooduliga, seega avaldub selline elementaartöö skalaarkorrutisena: $\mathrm{d}A = c(\vec{F} \cdot d\vec{r})$. See on SI-s tööd defineeriv valem, seepärast võrdetegur c=1 ja $\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{v} \cdot d\vec{p}$. Töö dimensioonvalem: $[A]=L^2MT^{-2}$, SI ühik SI_A=N m=J. Elementaartööd ei või tähistada dA, sest töö ei ole keha olekuga mingil hetkel määratud funktsioon, mille muut oleks dA. Töö keha lõplikul nihkel trajektoori punktist B punktini C avaldub joonintegraalina: $A_{B\to C} = \int_B^C \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Sirgjoonelise trajektoori korral: $A_{B\to C} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}_{B\to C}$.

Ajaühikus tehtud tööd nimetatakse <u>võimsuseks</u>. Keskmine võimsus $\overline{N} = \Delta A / \Delta t$. Hetkvõimsus: $N = \mathrm{d}A / dt = \vec{F} \cdot \vec{v}$. Võimsuse dimensioonvalem: $[N]=L^2MT^{-3}$, SI ühik: $SI_N=J\ s^{-1}=W$.

2.5. <u>Kineetiline energia.</u>

<u>Energia</u> W on keha võime teha tööd. <u>Kineetiline energia</u> W_k on liikuva keha võime teha tööd liikumist pidurdava jõu vastu. Et liikumine on taustsüsteemi suhteline mõiste, siis ka keha W_k sõltub taustsüsteemi valikust. Keha W_k antud hetkel saab leida kui vastandmärgiga töö, mille teeb keha pidurdav jõud antud hetkest kuni keha peatumiseni: $W_k = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_1^2 \vec{v} \cdot d\vec{p} = -\frac{m}{2}\int_v^0 d(v^2) = \frac{mv^2}{2}$. W_k dimensioon ja SI ühik langevad kokku töö omadega. <u>Kineetilise energia teoreem</u>: kehale mõjuvate jõudude summaarne töö kulub keha W_k muutmiseks: $A_{1\to 2} = W_{k2} - W_{k1} = \Delta W_k$. Mehhaanilise süsteemi W_k^Σ on süsteemi kuuluvate kehade W_{ki}-de summa. Kineetilise energia teoreem kehtib süsteemi kõikidele kehadele mõjuvate kõikide jõudude, sealhulgas ka sisejõudude töö kohta. <u>Königi teoreem:</u> $W_k^\Sigma = W_{k,C}^\Sigma + \frac{1}{2} m_\Sigma v_C^2$, kus W_k^Σ ja $W_{k,C}^\Sigma$ on keha kineetiline energia mingis inertsiaalses taustsüsteemis ja massikeskmega seotud taustsüsteemis, mis liigub eelmise suhtes kulgevalt, v_C on massikeskme kiirus

esimeses taustsüsteemis.

W_k seos teiste dünaamika suurustega: $W_k = \frac{p^2}{2m}$, $\frac{dW_k}{dt} = N$.

Keha liikumise kiiruse relativistlike väärtuste korral pole klassikaline valem W_k jaoks kasutatav, sest selle tuletamisel eeldati massi sõltumatust ajast ja kiirusest. Tegelikult sõltub mass kiirusest: $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2 / c^2}$, kus m_0 on keha mass taustsüsteemis, mille suhtes keha seisab paigal (seisumass). Sellest valemist lähtudes saadakse: $W_k = c^2 (m - m_0)$. Siit järeldub massi ja energia ekvivalentsus: kiirendava jõu töö kulub ühelt poolt kehale W_k andmiseks, samal ajal aga ka keha massi muutmiseks. Mass ja energia on sisuliselt üks keha iseloomustussuurus, mida on erinevate probleemide käsitlemisel sobiv mõõta erinevates mõõtskaalades.

2.6. Potentsiaalne energia. Mehaanilise energia jäävuse seadus.

Füüsikalise suuruse väli on ruumiosa, mille igas punktis selle suuruse väärtus on üheselt määratud. Jõuvälju võib väljajõudude poolt väljas kehade liikumisel tehtava töö järgi liigitada neljaks. 1. Konservatiivsed on a) statsionaarsed jõuväljad, milles b) kehale mõjuv jõud on määratud keha asukoha koordinaatidega, ei sõltu keha kiirusest ja c) väljajõu poolt keha nihkel tehtud töö on määratud nihke alg- ja lõpp-punkti asukohtadega, ei sõltu keha trajektoori kujust (näit. gravitatsiooniväli, elektrostaatiline väli, kõik tsentraalsed jõuväljad). 2. Dissipatiivsed (hajutavad) on jõuväljad, mille jõudude töö, arvutatuna ühega teineteist vastastikku mõjutavatest kehadest seotud taustsüsteemis, on negatiivne (hõõrdejõud). 3.Güroskoopilised on jõuväljad, milles kehale mõjuv jõud sõltub keha kiirusest ja on alati sellega risti (näit. Lorentzi jõud). 4.Mittestatsionaarsed on jõuväljad, mille korral valitud taustsüsteemis samas punktis olevale kehale mõjuv jõud muutub ajas (näit. lühiajalised tõuked või tõmbed).

Konservatiivse jõuvälja jõudude töö keha nihkel B$\rightarrow$C avaldub kahe, B ja C koordinaatidest sõltuva ühesuguse avaldise vahena. Need avaldised kirjeldavad keha potentsiaalset energiat: $A_{B \rightarrow C} = W_{p,B} - W_{p,C}$ (*). W_p nullnivoo valik on suvaline, seepärast on see suurus määratud suvalise liidetava konstandi täpsusega, üheselt on määratud vaid muut ΔW_p keha nihkel. Tsentraalsete jõuväljade korral kasutatakse sageli nullnivoona W_p väärtust väljatsentrist lõpmata kaugel asuvates punktides. Sellisel juhul on tõmbejõu väljas $W_p<0$, tõukejõu väljas aga $W_p>0$. Näiteid keha W_p arvutamise kohta tsentraalsümmeetrilises gravitatsiooniväljas, punktlaengu elektrostaatilises väljas, raskusjõu väljas Maa pinna lähedal.

Kui konservatiivne väljajõud on ainus kehale mõjuv jõud, siis valemi (*) ja kineetilise energia teoreemi abil jõuame mehhaanilise energia jäävuse seaduseni: konservatiivses jõuväljas asuva keha mehhaaniline koguenergia on ajas muutumatu, jääv suurus: $W = W_k + W_p = const$. Mehhaanilise süsteemi $W_{p,\mathrm{S}}$ välises konservatiivses jõuväljas on süsteemi kehade W_p-de summa. Kui süsteemi kehade vahel mõjuvad konservatiivsed sisejõud, siis on kehadel üksteise tekitatud jõuväljades ka potentsiaalne energia, mis kuulub süsteemile tervikuna ja mida ei saa jaotada kehade vahel. Seda nimetatakse süsteemi vastasmõju energiaks e. seoseenergiaks W_p^s. Mehhaanilise energia jäävuse seadus süsteemi jaoks: $W_\Sigma = W_{k,\Sigma} + W_{p,\Sigma} + W_p^{\,s}$. Kui mehhaanilises süsteemis mõjuvad peale konservatiivsete jõudude ka mittekonservatiivsed jõud, siis mehhaanilise energia jäävuse seadus ei kehti, mittekonservatiivsete jõudude töö kehade nihkel süsteemi algolekust I lõppolekusse II kulub süsteemi mehhaanilise energia muutmiseks: $\Delta W_\Sigma = A_{I \rightarrow II}^{mittekons}$. Millised mittekonservatiivsed jõud võivad a) vähendada, b) suurendada süsteemi $W_{p,\mathrm{S}}$?

Konservatiivse jõuvälja kahe iseloomustussuuruse, jõuvektori $\vec{F}$ ja skalaari W_p vahel mingis ruumipunktis B on kahepoolne seos: 1) $W_{p,B} = \int_B^0 \vec{F} \cdot d\vec{r}$, 2) $\vec{F} = -grad\, W_p = -\nabla W_p$. Siin skalaari W_p gradient avaldub: $grad\, W_p = \frac{\partial W_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial W_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial W_p}{\partial z}\vec{k}$, sümbol ∇ tähistab sellele järgneva suurusega tehtavate matemaatiliste operatsioonide kogumit, operaatorit: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$. Gradientvektori füüsikaline sisu: selle suund näitab väljaskalaari kiireima kasvu suunda, moodul aga skalaari muutumise ruumilist kiirust (muut nihke pikkusühiku kohta) selles suunas.

2.7. Impulsi ja energia jäävuse seaduste rakendusi. Põrked.

Põrge on üksteise suhtes liikuvate kehade lähenemisel (kokkupuutel) tekkiv lühiajaline vastasmõju protsess, mida iseloomustab vastasmõju lühiajalisus, suured vastasmõju jõud ja suured kiirendused. Põrkuda saavad lõplike mõõtmetega kehad, punktmassi mudel ei ole kasutatav. Põrge võib toimuda suure mõjuraadiusega vastasmõju tõukejõu väljade vahendusel (elektriliselt laetud või magnetiseeritud kehad), ilma kehade otsese kontaktita. Kumerate välispindadega kehade esimese kokkupuute punktis pindade ühisele puutetasandile tõmmatud ristsirget nimetatakse põrkesirgeks. Põrkeprotsessi aja võib jaotada kaheks osaks: lähenemise faas ja eemaldumise faas (Mis need on?)

Põrkeid liigitatakse kahel erineval alusel. 1) põrkuvate kehade kiirusevektorite sihi ja nende massikeskmete asendi järgi esimese kontakti hetkel põrkesirge suhtes eristatakse a) tsentraalseid põrkeid, b) otsepõrkeid, c) tsentraalseid otsepõrkeid ja d) mittetsentraalseid kaldpõrkeid; 2) energia muundumise protsesside ieloomu järgi eristatakse a) absoluutselt elastseid, b) absoluutselt mitteelastseid ja c) poolelastseid põrkeid. Kõigi põrgete korral kehtib põrkuvatest kehadest moodustatud mehhaanilise süsteemi impulsi jäävuse seadus, mehhaanilise energia jäävuse seadus kehtib vaid absoluutselt elastse põrke korral. Absoluutselt elastne põrge on makrokehade korral realiseeritav vaid otsese kokkupuute puudumisel. Absoluutselt mitteelastse põrke korral moodustavad kehad pärast põrget ühise terviku. Tavaliselt muutub põrkel ka kehade pöörlemise olek, ainult tsentraalse otsepõrke korral on see välistatud.

Kahe keha absoluutselt mitteelastse põrke korral arvutatakse tekkinud liitkeha massikeskme lõppkiirus pärast põrget impulsi jäävuse seadusest: $\vec{v} = (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)/m_\Sigma$. Osa kehadel enne põrget olnud kineetilisest energiast kulub kehade deformeerimisel tehtavaks tööks, muundudes sealjuures soojusenergiaks. Tsentraalsel otsepõrkel saab selle deformatsioonitöö arvutada W_k vahena enne ja pärast põrget: $A_{def} = 1/2\,\mu\, v_{suht}^2$, kus $\mu = m_1 m_2 /(m_1 + m_2)$ nimetatakse süsteemi ekvivalentseks massiks, v_{suht} on ühe keha massikeskme kiirus teise keha massikeskmega seotud taustsüsteemis.

Kahe keha absoluutselt elastse tsentraalse otsepõrke korral on kehade massikeskmete lõpp- ja algkiirused $\vec{v}'$ ja $\vec{v}$ seotud impulsi ja mehhaanilise energia jäävuse seaduste kaudu. Kui suunata näit. x-telg piki põrkesirget, siis on ainult kiiruste x-projektsioonid 0-st erinevad:

$$\left.\begin{aligned} v'_{2,x} &= -v_{2,x} + 2\frac{m_1 v_{1,x} + m_2 v_{2,x}}{m_1 + m_2}, \\ v'_{1,x} &= -v_{1,x} + 2\frac{m_1 v_{1,x} + m_2 v_{2,x}}{m_1 + m_2}. \end{aligned}\right\}$$

Erijuhul, kui $m_1 = m_2$, siis kehad vahetavad kiirused. Kui $m_2 \to \infty$ (põrge vastu tasast massiivset seina), kehtib kaldpõrkel optikast tuntud peegeldumise seadus.

2.8. Dissipatiivsed jõud (hõõrdejõud).

Hõõrdejõud liigitatakse: 1) kuiva hõõrde jõud tahkete kokkupuutuvate pindade vahel ja 2) märja ehk viskoosse hõõrde jõud vedelike või gaaside erineva kiirusega liikuvate kihtide vahel. Hõõrdejõud on tangentsiaaljõud – nad on alati rakendatud tahke keha või vedelikukihi pinnale ja suunatud paralleelselt sellega. Kui taustsüsteem siduda ühega teineteist hõõrdejõududega mõjutavatest kehadest, siis on antud kehale mõjuv hõõrdejõud alati keha liikumisele vastassuunaline, pidurdav jõud; see teeb negatiivset tööd, teisendades mehhaanilist energiat soojuseks.

Kuiva hõõrde tekkepõhjuseks on kehade kokkupuutuvate pindade konaruste haakumine. Kui ühele kehale rakendatud välisjõu tangentsiaalkomponendi moodul F_τ on väiksem teatud piirväärtusest F_0, siis kehad jäävad teineteise suhtes paigale, nende vahel mõjub seisuhõõrdejõud $\vec{F}_{sh} = -\vec{F}_\tau$. See võrdus on automaatselt täidetud, kuni $F_\tau < F_0$, haakunud konarused on deformeeritud elastselt. F_{sh} on ainuke konservatiivne hõõrdejõud. Kui $F_\tau \geq F_0 = \mu_0 N$ (*), siis hakkavad pinnad üksteise suhtes nihkuma, haakunud konarused deformeeruvad mitteelastselt, seisuhõõrdejõud asendub dissipatiivse liugehõõrdejõuga: $F_h = \mu N$. Konstandid μ_0 ja μ on vastavalt seisu- ja liugehõõrdetegurid, mis on määratud kokkupuutuvate pindade omadustega (keemiline koostis, siledus); N on normaalreaktsiooni-jõud (kehade vastasmõjujõu kokkupuutuvate pindadega ristuv komponent). Valem (*) väljendab Amontonsi seadust. Liugehõõrdetegur μ sõltub mõningal määral pindade suhtelisest kiirusest. (Joonestada graafik $\mu = \mu(v_{suht})$!). Mõningate pinnapaaride korral (näit. kaks erinevat metalli) on see sõltuvus väga nõrk, mis kajastub ligikaudses Coulombi seaduses: $\mu \neq \mu(v_{suht})$.

Viskoosse hõõrde tekkepõhjuseks on molekulide vahetus erineva kiirusega liikuvate naaberkihtide vahel ja molekulaarjõud (vedelikes). Viskoosse hõõrde korral puudub täielikult seisuhõõrde nähtus, hõõrdejõud naaberkihtide väikese suhtelise kiiruse korral on võrdeline kiirusega ja liikuvate kihtide kokkupuutepinna pindalaga. Lähem käsitlus hüdrodünaamika ja soojusfüüsika kursustes.

3. Pöördliikumise dünaamika

3.1. Jõumoment ja impulsimoment.

Newtoni 2. seadusele ühe punktmassi jaoks saab mingis valitud inertsiaalses taustsüsteemis anda kuju: $\dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O$ (*). Siin $\vec{L}_O = \vec{r}_O \times \vec{p}$, $\vec{M}_O = \vec{r}_O \times \vec{F}$ on vastavalt punktmassi impulsimoment ja temale mõjuva jõu moment taustsüsteemi koordinaadistiku alguspunkti O suhtes (vektorilised momendid); $\vec{r}_O$ on punktmassi kohavektor, $\vec{p}$ selle impulss ja $\vec{F}$ on punktmassile mõjuv resultantjõud. Pseudovektorid $\vec{L}_O$ *ja* $\vec{M}_O$ sõltuvad taustsüsteemi valikust. Nende dimensioonvalemid ja ühikud: $[L]=L^2MT^{-1}$, SI_L = kg m^2 s^{-1}; $[M] = L^2MT^{-2}$, SI_M = kg m^2 s^{-2}=N m. Võrdus (*) kannab vektorilise momentide võrrandi nime.

Mehhaanilise süsteemi impulsimoment $L_{O,\Sigma}$ on süsteemi kehade impulsimomentide summa. Vektoriline momentide võrrand süsteemi jaoks: $L_{O,\Sigma} = M_{O,\Sigma}$ Siin $M_{O,\Sigma}$ on süsteemi kõigile kehadele mõjuvate välisjõudude punkti O suhtes arvutatud momentide summa. Süsteemi sisejõud ei saa muuta süsteemi impulsimomenti. Kui mehhaanilisel süsteemil on üksainus kinnispunkt (välises taustsüsteemis fikseeritud punkt), siis vektoriline jõumoment iseloomustab jõu pööravat (jõumomendi sihiga määratud ja punkti O läbiva telje ümber nurkkiirendust tekitavat) toimet.

Kui mehhaanilises süsteemis on fikseeritud pöörlemistelg OO', siis selle telje mingi punkti suhtes arvutatud momentide projektsioone teljele nimetatakse momentideks telje suhtes ehk skalaarseteks impulsi- ja jõumomendiks: $L_{OO'}$ ja $M_{OO'}$. Skalaarne moment on võrdne vektori ja selle õla (vektori sihi ja telje vaheline kaugus) korrutisega. Kui telje suund on kokkuleppeliselt määratud, on skalaarsed momendid märgiga suurused (+ või -). Jõumomendi kohta kasutatakse vahel kokkulepet: kui see pöörab vastukella, loetakse projektsioon positiivseks. Skalaarne momentide võrrand mehhaanilise süsteemi jaoks: $\dot{L}_{OO',\Sigma} = M^{välis}_{OO',\Sigma}$ on fikseeritud teljega süsteemi dünaamika põhivõrrandiks (Newtoni 2. seadus). Skalaarne impulsimoment avaldub süsteemi telje OO' suhtes arvutatud inertsimomendi $I_{OO',\Sigma} \equiv I_{O,\Sigma}$ ja nurkkiiruse ω korrutisena, seepärast: $\frac{d}{dt}(I_{O,\Sigma}\,\omega) = M^{välis}_{O,\Sigma}$. Jäiga süsteemi ($I_{O,\Sigma} = \text{const}$, näiteks üksik jäik keha) jaoks saame: $I_{O,\Sigma}\,\beta = M^{välis}_{O,\Sigma}$.

Inertsimoment iseloomustab süsteemi inertsi pöörlemisel ümber fikseeritud telje, see sõltub massist ja selle paigutusest telje suhtes. Punktmassi inertsimoment: $I_O = mr_n^2$, kus r_n on punktmassi kaugus pöörlemisteljest. Inertsimomendi dimensioonvalem ja ühik: $[I]=L^2M$, $SI_I=kg\ m^2$. Punktmasside süsteemi inertsimoment: $I_{O,\Sigma} = \sum_{i=1}^{n} I_{O,i}$, kus n on süsteemi punktmasside arv.

3.2. Inertsimomentide arvutamine.

- Inertsimomendi arvutusmeetodite aluseks on punktmassi inertsimomendi valem telje OO' suhtes: $I_O = mr_n^2$.
- Mingist arvust n kehast koosneva mehhaanilise süsteemi inertsimoment: $I_{O,\Sigma} = \sum_{i=1}^{n} I_{O,i}$. Siin $I_{O,i}$ on i-nda keha inertsimoment, mis punktmasside süsteemi korral avaldub: $I_{O,i} = m_i\, r_{n,i}^2$.
- Jäiga keha inertsimomendi arvutamiseks jagatakse keha ruumala mõtteliselt füüsikaliselt lõpmata väikesteks osadeks ja arvutatakse selliselt moodustunud mehhaanilise süsteemi inertsimoment: $I_O = \lim_{\substack{\Delta m_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i\, r_{n,i}^2 = \int_V r_n^2\, dm = \int_V dI_O$. See integraal on analüütiliselt arvutatav vaid geomeetriliselt korrapäraste kehade korral, üldjuhul saab seda arvutada vaid numbriliste meetoditega.
- Huygensi-Steineri teoreem seob kahe paralleelse pöörlemistelje suhtes arvutatud inertsimomente: $I_O = I_C + ma^2$. Siin I_c on arvutatud massikeset C läbiva, OO'-ga paralleelse telje CC' suhtes, a on nende telgede vaheline kaugus, m on keha (punktmassi, süsteemi) mass.
- Ristkoordinaadistiku telgede suhtes arvutatud inertsimomentide summa osutub võrdseks kahekordse suurusega, mida tinglikult nimetatakse inertsimomendiks koordinaatide alguspunkti O suhtes: $I_x + I_y + I_z = 2\Theta_O$. Punktmasside süsteemi korral: $\Theta = \sum_{i=1}^{n} m_i\, r_{O,i}^2$, jäiga keha korral $\Theta = \int_V r_O^2\, dm$. Siin $r_{O,i}$ ja r_O on vastavalt punktmassi või massielemendi dm kaugus alguspunktist O.
- Õhukeste plaatide korral (massi kahemõõtmeline jaotus), kui siduda koordinaadistik plaadi suvalise punktiga O ja suunata z-telg risti plaadi pinnaga, saame eelmisest valemist: $I_x + I_y = I_z$.

Näiteid: peenikese varda, õhukese ristkülikukujulise plaadi, peenikese rõnga, õhukese ketta, silindri, õhukese seinaga õõnsa sfääri ja kera inertsimomendid mitmesuguste telgede suhtes.

3.3. Impulsimomendi jäävuse seadus.

Kui mehhaanilisele süsteemile mõjuvate välisjõudude momentide summa mingi punkti O suhtes on null, siis selle punktiga seotud inertsiaalses taustsüsteemis saame vektorilisest momentide võrrandist:

$\dot{\vec{L}}_{O,\Sigma} = 0 \Rightarrow \vec{L}_{O,\Sigma} = const$. Sellises mehhaanilises süsteemis kehtib vektorilise impulsi-momendi jäävuse seadus (VIJS). Selle seaduse kehtivuse tingimuseks ei ole süsteemi suletus, mõne teise punkti suhtes ei pruugi see kehtida. Näit. Päikesesüsteemis kehtib see seadus vaid Päikese keskpunktiga seotud taustsüsteemis. VIJS-st tulenevad Kepleri 2. ja osalt 1. seadus. Erijuhul, kui mehhaanilise süsteemi $\vec{p}_\Sigma = 0$, ei sõltu $\vec{L}_\Sigma$ punktist, mille suhtes ta on arvutatud. Siis võib ka VIJS kehtida universaalselt, kõikide punktide suhtes.

Kui mehhaanilisele süsteemile mõjuvate välisjõudude momentide summa mingi telje OO' suhtes on null, siis skalaarsest momentide võrrandist selle telje suhtes järeldub skalaarse impulsimomendi jäävuse seadus: $\dot{L}_{OO'} = 0 \Rightarrow L_{OO'} = const \Rightarrow I_O \omega = const$. Sellises süsteemis on võimalik sisejõududega inertsimomenti muutes muuta pöörlemise nurkkiirust (piruett, salto).

Kui sümmeetriatelge omav keha (süsteem) pöörleb selle telje ümber, siis tema suvalise punkti O suhtes arvutatud $\vec{L}_{O,\Sigma} \uparrow\uparrow \vec{\omega}$ ($\vec{p}_\Sigma = 0$!) ja kehtib seos: $\vec{L}_{O,\Sigma} = I\vec{\omega}$. Kui nüüd $\vec{L}_{O,\Sigma} = const$, siis ka $\vec{\omega} = const$, ja selline süsteem säilitab oma pöörlemistelje sihi ruumis.

Jäävuse seaduste universaalne kehtivus nii makro- kui mikromaailmas on tingitud nende lahutamatust seotusest ruumi ja aja sümmeetriaomadustega: ruumi homogeensus $\Leftrightarrow$ impulsi jäävus, ruumi isotroopsus $\Leftrightarrow$ impulsimomendi jäävus, aja homogeensus $\Leftrightarrow$ mehhaanilise energia jäävus.

3.4. Pöörleva keha kineetiline energia. Pöörava jõumomendi töö.

Ümber fikseeritud telje OO' pöörleva keha W_k arvutamiseks tuleb keha jälle jagada punkt-massidena vaadeldavateks väikesteks osadeks ja liita nende punktmasside kineetilised energiad. Tulemusena saame: $W_k = \frac{1}{2} I_O \omega^2$, kus I_O on keha inertsimoment telje OO' suhtes ja ω on keha pöörlemise nurkkiirus. Pöördkeha veeremisel saame Königi teoreemi abil: $W_k = \frac{1}{2} I_C \omega_C^2 + \frac{1}{2} m v_C^2$. Siin indeks C tähistab pöördkeha puhul alati pöörlemisteljel asuvat massikeset, ühtlasi siis ka pöörlemistelge ennast.

Kui fikseeritud pöörlemisteljega OO' kehale mõjub jõud, millel on moment $M_{OO'}$ pöörlemistelje suhtes, siis see jõumoment teeb tööd keha pöörlemise kiirendamisel. Töö elementaarpöördel $d\varphi$ avaldub: $\delta A = M_{OO'}\, d\varphi$, lõplikul pöördel $\Delta\varphi$ aga: $A = \int_0^{\Delta\varphi} M_{OO'}\, d\varphi = \int_0^t M_{OO'} \omega\, dt = \int_0^t (\vec{M}_O \cdot \vec{\omega})\, dt$.

3.5. Jäiga keha liikumine mittefikseeritud pöörlemistelje korral.

Jäiga keha liikumisi võib kõige üldisemalt liigitada: kulgliikumine, pöördliikumine ja nende kombinatsioonid. Pöördliikumiste liigitus: 1) pöörlemine ümber kehas ja välises taustsüsteemis fikseeritud telje, 2) tasapinnaline liikumine, telg võib olla kehas fikseeritud või mitte, 3) samaaegne pöörlemine ümber mitme hierarhilise telje, millest esimene on fikseeritud kehas ja viimane välises inertsiaalses taustsüsteemis, viimane telg võib liikuda kulgevalt, 4) üks punkt (kinnispunkt) on fikseeritud välises taustsüsteemis, keha võib pöörelda ümber suvalise, kinnispunkti läbiva telje, 5) vaba keha pöörlemine e. vaba pöörlemine (massijõudude homogeenses väljas asuv keha on pöörlemise seisukohast vaba keha).

Tasapinnalisel liikumisel on keha iga punkti trajektoor tasapinnaline kõver, keha elementaarnihe on pööre ümber selle tasandiga ristuva hetkelise telje, mis üldjuhul nihkub nii kehas kui välises taustsüsteemis. Liikumise kirjeldamiseks piisab ühe teljega risuva lõike liikumise kirjeldamisest (kahest koordinaadist). Näide: pöördkeha veeremine mööda mingit (tasast või kõverat) toetuspinda. Siin on telg (pöördkeha sümmeetriatelg) kehas fikseeritud. Kui pöördkeha fikseeritud teljele rakendada aluspinna puutujaga paralleelne jõud $\vec{F}$, siis paneb aluspinna poolt mõjuva hõõrdejõu moment telje suhtes keha pöörlema ümber selle telje, telg ise liigub kulgevalt – veeremine. Kui $F \le \mu_0 F_N (\frac{mR^2}{I} + 1)$, on veeremine libisemiseta, hõõrdejõud on seisuhõõrdejõud F_{sh}. Siin F_N on toetuspinna poolt mõjuv normaalreaktsioonijõud, μ_0 on seisuhõõrdetegur, *m*, *R* ja *I* on pöördkeha mass, raadius ja inertsimoment sümmeetriatelje suhtes. Massikeskme kiirendus a_C ja F_{sh} leitakse dünaamika põhivõrrandite süsteemi lahendamisel: $a_C = \frac{F}{m(1 + \frac{I_C}{mR^2})}$, $F_{sh} = \frac{F}{\frac{mR^2}{I_C} + 1}$. Rakendada neid valemeid pöördkeha allaveeremisel kaldpinnalt raskusjõu mõjul!

Kinnispunktiga jäik keha saab vaid pöörelda ümber seda kinnispunkti läbiva telje, mis võib pöörduda nii kehas kui välises taustsüsteemis (hetkeline telg). Kui välisjõudude summaarne moment kinnispunkti O suhtes on null, siis $\vec{L}_O = const$, aga et üldjuhul (kui keha ei pöörle ümber oma sümmeetriatelje või, üldisemalt, ümber vaba pöörlemise telje (vt. allpool)) $\vec{L}_O$ ei ole paralleelne pöörlemisteljega, siis tekib täiendav liikumine – vaba pretsessioon. Pöörlemistelg pöördub pidevalt, joonestades koonuse, mille telg ühtib $\vec{L}_O$-ga ja tipp on punktis O.

Vaba keha saab pöörelda vaid ümber kehas fikseeritud vaba pöörlemise telgede e. tsentraalsete peainertsitelgede, mis alati läbivad massikeset. Neid on igas kehas vähemalt kolm. Sümmeetriateljed on alati vaba pöörlemise telgedeks. Inertsimomendid nende telgede suhtes on tsentraalsed peainertsimomendid. Kui nummerdada peainertsiteljed nii, et $I_1 > I_2 > I_3$, siis on stabiilne vaba pöörlemine võimalik vaid ümber telgede 1 ja 3.

Kulgliikumisel iseloomustab keha inertsust vaid üks skalaarne suurus – mass. Pöördliikumiseks võib valida lõpmatu hulga erinevaid telgi, vastavalt saame ka lõpmatu hulga inertsimomendi väärtusi. Kõiki neid saab arvutada, kui vaadeldavas taustsüsteemis on määratud 9-komponendiline suurus – inertsitensor. Kui siduda taustsüsteem massikeskmega ja suunata koordinaatteljed mööda peainertsitelgi, siis osutuvad tsentraalsed peainertsimomendid inertsitensori ainsateks nullist erinevateks komponentideks ja nende kaudu võib arvutada keha inertsimomendi suvalise massikeset läbiva telje suhtes.

Kolme vabaduseastmega güroskoobiks nimetatakse igat kinnispunktiga keha, mis pöörleb ümber fikseeritud telje. Kui pöörlemisteljeks on sümmeetriatelg, on sümmeetriline güroskoop. Kui puudub välisjõudude moment kinnispunkti O suhtes, on vaba güroskoop. Välisjõudude moment kinnispunkti suhtes $\vec{M}_O$ tekitab sundpretsessiooni. Suure inertsimomendiga kiiresti pöörleva sümmeetrilise güroskoobi korral (miks ainult nendel tingimustel?) saab sundpretsessiooni nurkkiirust arvutada valemist: $\Omega = \frac{M_O}{L_O} = \frac{M_O}{I_O \omega}$, kus L_O ja I_O on keha impulsimoment ja inertsimoment sümmeetriatelje suhtes, ω on pöörlemise nurkkiirus. Kehtib vektorvalem: $\vec{M}_O = \vec{\Omega} \times \vec{L}_O$. Sundpretsessiooni tekkimisel ilmnev näiline vastuolu mehhaanilise energia jäävuse seadusega seletub, kui arvestada nutatsioonliikumise olemasolu, mis selgesti nähtub vaid güroskoobi aeglasel pöörlemisel.

4. Liikumine mitteinertsiaalsete taustsüsteemide suhtes

Mitteinertsiaalsetes taustsüsteemides ei kehti Newtoni seadused. Lähtudes Newtoni 2. seadusest inertsiaalses taustsüsteemis ja kasutades Galilei teisendusvalemeid on võimalik saada dünaamika põhivõrrand kulgevalt liikuvate mitteinertsiaalsete taustsüsteemide jaoks: $m\vec{a}_{mittein} = \vec{F}_{\Sigma} - m\vec{a}_{O'}$. Viimane liige on jõu dimensiooniga, seda nimetatakse inertsijõuks: $\vec{F}_i = -m\vec{a}_{O'}$, kus $\vec{a}_{O'}$ on mitte-inertsiaalse taustsüsteemi kiirendus inertsiaalse suhtes. Inertsijõud pole vastasmõjujõud, kuid kiirenduse põhjustajana on see sama reaalne jõud kui vastasmõjujõud. Inertsijõudude väli on lokaalses ruumipiirkonnas (näit. kinnise kasti sees, kui puudub side välismaailmaga) gravitatsiooniväljast eristamatu (Einsteini ekvivalentsuse printsiip), seda võib vaadelda kui gravitatsioonivälja nullolekus. Seetõttu on Newtoni 2. seaduses esinev inertne mass ja Newtoni gravitatsiooniseaduses esinev raske mass täpselt võrdsed.

Nurkkiirusega $\vec{\omega}$ pöörleva mitteinertsiaalse taustsüsteemi suhtes kiirusega $\vec{v}'$ liikuva punktmassi liikumisvõrrand selles mitteinertsiaalses taustsüsteemis avaldub: $m\vec{a}_{mittein} = \vec{F}_{\Sigma} - 2m(\vec{\omega}\times\vec{v}') - m\vec{a}_{O'} + m\omega^2\vec{r}_n - m(\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_n)$. Teine liige on põhjustatud punktmassi liikumisest mitteinertsiaalsüsteemi suhtes, seda nimetatakse Coriolise jõuks. Neljas liige on tsentrifugaaljõud, $\vec{r}_n$ on punktmassi raadiusvektori pöörlemisteljega ristuv komponent. Viimane liige on põhjustatud taustsüsteemi kiirenevast pöörlemisest.

5. Tugevusõpetuse alged

5.1. Elastsed deformatsioonid.

Välisjõudude mõju alt vabas tahkes kehas on molekulid üksteise suhtes fikseeritud keskmistes asendites, mille ümber toimub kaootiline võnkumine. Küllalt suure välisjõu rakendamisel tahke keha välispinnale nihkuvad molekulid neist tasakaaluasenditest, jäiga keha mudel ei ole enam rakendatav. Keha kuju või (ja) ruumala muutuvad, keha deformeerub. Tekivad molekulidevahelised lisajõud, mis mitte väga suurte nihete korral tasakaalulistest asenditest on võrdelised selle nihkega. Nende molekulaarjõudude summa tasakaalustab välisjõu. Keha sees valitud suvalise mõttelise lahutuspinna füüsikaliselt väikese tüki dS ulatuses mõjutavad kummalegi poole pinda jäävad aineosad teineteist summaarse molekulaarjõuga $d\vec{f}$ $(-d\vec{f})$, mis võib olla suvaliselt suunatud pinnatüki normaali suhtes. Seda jõudu pindalaühiku kohta $\frac{d\vec{f}}{dS}$ nimetatakse pingeks, selle projektsioon pinnatüki normaalile on normaalpinge σ , projektsioon pinna puutujale on tangentsiaalpinge τ. Kui pingevektori pinnaga ristuv komponent on suunatud aine sisse, nimetatakse normaalpinget rõhuks p. Pinge dimensioonvalem: $[p]=L^{-1}MT^{-2}$; Si ühik: $SI_{\sigma}=SI_{\tau}=N/m^2$. Väikeste deformatsioonide korral kehtib Hooke'i seadus: sisepinged on võrdelised välisjõu poolt tekitatud suhtelise deformatsiooniga ε (keha mingi lineaarmõõtme või ruumala suhtelise muutusega, molekulaartasandil molekulidevahelise kauguse suhtelise muutusega). Hooke'i seadusele alluvaid deformatsioone nimetatakse elastseteks, need kaovad täielikult pärast välisjõu mõju lakkamist. Elastsete deformatsioonide korral kehtib superpositsiooni printsiip: mitu välisjõudu tekitavad deformatsiooni sõltumatult, deformatsioonid ja pinged liituvad geomeetriliselt. Kui tekkinud sisepinged ületavad igale ainele iseloomuliku elastsuse piiri, muutuvad deformatsioonid mitteelastseteks, pärast välisjõu eemaldamist säilib jääkdeformatsioon. Kas on olemas ideaalselt elastseid deformatsioone? Pinge sõltuvust tekitatud suhtelisest deformatsioonist näitaval deformatsioonikõveral on elastsuse piirkond, voolavuse piirkond ja üleminekupiirkonnad; sealt määratakse piirpinged: elastsuse, voolavuse ja tugevuse piir (mis need on?).

Keha kuju muutumise iseloomu järgi võib liigitada deformatsioonid: venitus-surve, nihe, igakülgne (hüdrostaatiline) kukkusurumine, vääne, paine. Neist esimesed kolm on homogeensed – keha suvalise osa suhteline deformatsioon on võrdne kogu keha ε-ga, pinge ja molekulaarjõudude potentsiaalne energia ruumalaühiku kohta on samad kogu keha ruumala ulatuses. Venituse-

<u>survedeformatsiooni</u> saab puhtal kujul realiseerida peenes vardas varda otspinnale sellega risti mõjuva välisjõu mõjul. Hooke'i seadus: $\sigma = \pm E\varepsilon$, kus $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$, Δl on varda pikkuse muutus (absoluutne deformatsioon), l_0 on varda algpikkus, võrdetegur E on pinge dimensiooniga elastsus- e. Youngi moodul, miinusmärk kehtib survedeformatsiooni korral. Muutub ka varda teljega ristsihiline mõõde d: $\varepsilon = \pm\frac{\Delta d}{d}$; Poissoni koefitsient $\mu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ ja E määravad aine elastsed omadused täielikult. <u>Nihkedeformatsioon</u> tekib keha välispinnaga paralleelsete vastassuunaliste mitte samal sirgel mõjuvate jõudude paari rakendamisel keha välispinnale. Keha lõpmata õhukesed välisjõududega paralleelsed kihid nihkuvad jõudude sihis, kõik jõududega ristuvad sirged kehas kalduvad nihkenurga γ võrra, kehas tekivad nihkunud kihtidega paralleelsed tangentsiaalpinged. Hooke'i seadus: $\tau = G\gamma$. Siin γ on suhteline deformatsioon, G on pinge dimensiooniga nihkemoodul: $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$. <u>Hüdrostaatiline kokkusurumine</u> (HSK) tekib vedelikku paigutatud tahkes kehas, kui vedelikus tekitada staatiline rõhk p, mis Pascali seaduse järgi mõjub ühtlaselt keha kogu pinnale. Hooke'i seadus: $p = -K\frac{\Delta V}{V_0}$, ruumala suhtelise muutuse ees seisev võrdetegur K on HSK moodul: $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$.

5.2. <u>Elastselt deformeeritud keha potentsiaalne energia.</u>

Molekulidevahelised jõud on konservatiivsed, seega on elastselt deformeeritud kehal potentsiaalne energia. Selle arvutamiseks tuleb leida lõpmata aeglaselt nullist kuni lõppväärtuseni muutuva(te) välisjõu(dude) töö keha deformeerimisel. Homogeensete deformatsioonide korral on energiatihedus u_p (W_p ruumalaühiku kohta) ühtlane kogu keha ruumalas: $u_p = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2E}$ (venituse-survedeformatsioon), $u_p = \frac{1}{2}G\gamma^2 = \frac{\tau^2}{2G}$ (nihkedeformatsioon), $u_p = \frac{p^2}{2K}$ (HSK).

5.3. <u>Surve- ja nihkedeformatsiooni levimine tahkes aines.</u>

Kui elastse tahke keha mingis punktis (näit. välispinna mingil väikesel pinnatükil) tekitada lokaalne deformatsioon, siis hakkab see levima igas suunas. Lokaalselt deformeeritud ruumalas olevad molekulid mõjutavad naabreid, need oma naabreid jne. Deformatsiooninähtuse levimise kiirust nimetatakse helikiiruseks v_h. Venituse-survedeformatsiooni levimise kiirus peenes vardas: $v_h = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, lõpmatu ulatusega ainetükis aga: $v'_h = \sqrt{\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}\frac{E}{\rho}}$. Siin ρ on aine tihedus; kiiruse erinevus viimasel juhul on tingitud ristsihilise deformatsiooni takistatusest naabruses oleva aine poolt. Siin mõlemal juhul liiguvad molekulid deformatsiooni levikuga samas sihis. Nihkedeformatsioon levib molekulide nihkega ristiolevas sihis; et siin ruumala üldse ei muutu, siis ei sõltu deformatsiooni leviku kiirus ainetüki kujust ega suurusest: $v''_h = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$. Lõpmata peenikesel elastsel traadil (pillikeelel) levib traadiga ristuv nihe kiirusega $v_h''' = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}$. Siin T on traati pingutav jõud, ρ_l on traadi lineaartihedus (mass pikkuseühiku kohta).

6. Hüdromehhaanika

6.1. Vedelik ja gaas. Hüdrostaatika.

Vedelikud ja gaasid on mehhaanika seisukohalt pideva keskkonna erijuht, milles tasakaaluolukorras ei saa esineda tangentsiaalpingeid, sest kuitahes väike tangentsiaalpinge põhjustab selle keskkonna mõtteliste osade – kihtide suhtelist liikumist. Vedelikel ja gaasidel puudub kujuelastsus, nihkedeformatsioonil ei teki elastseid tangentsiaalpingeid; on aga olemas ruumelastsus – kokkusurumisel tekib igal mõeldaval keskkonnaosade lahutuspinnal aine sisse suunatud normaalpinge – rõhu - muutus, mis on võrdeline ruumala suhtelise muutusega: $\Delta p = -K\frac{\Delta V}{V}$. Siin K on ruumelastsuse tegur, mis vedelike korral on kuni neli suurusjärku suurem kui gaaside korral. Kui piirduda gaaside liikumise vaatlemisel väikeste kiirustega laiades voolukanalites, siis võib nende lihtsat kokkusurutavust ignoreerida ja käsitleda nii vedelike kui gaaside liikumist samade hüdromehhaanika meetoditega, kasutades mittekokkusurutava vedeliku mudelit. (Tiheduse muutumisega seotud nähtusi ei saa käsitleda ainult mehhaanika meetoditega, sest sellega kaasnevad soojuslikud efektid.) Vedeliku kihtide suhtelisel liikumisel tekkivad tangentsiaalpinged on, erinevalt tahketest ainetest, määratud mitte nihke, vaid suhtelise liikumise kiirusega; need muudavad liikuva vedeliku kineetilist energiat soojuseks. neid pingejõude nimetatakse sisehõõrdejõududeks. Liikumiste korral, mil soojuseks muundunud energia suhteline hulk on tühiselt väike, kasutatakse ideaalse vedeliku mudelit, millel puudub sisehõõre.

Mittekokkusurutava ideaalse vedeliku liikumist kirjeldab Newtoni 2. seaduse rakendamisel füüsikaliselt lõpmata väikesele vedelikuruumalale saadav Euleri võrrand: $\rho\,\vec{a} = \vec{f} - grad\,p$. Siin ρ on vedeliku tihedus, $\vec{f}$ on massijõudude tihedus (Maa raskusväljas on see raskusjõud ühikruumala kohta), $\vec{a}$ on vaadeldava elementaarruumala kiirendus. Siit tulenevad lihtsalt vedeliku tasakaaluolekut (paigalseisu või tervikuna ühtlast liikumist) kirjeldavad hüdrostaatika seadused. Sel juhul $\vec{a} = 0$; kui ka $\vec{f} = 0$, siis $p = const \neq p(x, y, z)$ - Pascali seadus. Raskusväljas $\vec{f} = \rho\,\vec{g}$, siit tuleneb valem rõhu arvutamiseks sügavusel h vedeliku pinnast: $p = p_0 + \rho\, g\,h$, kus p_0 on välisrõhk pinna kohal. Viimasest valemist tuleneb Archimedese seadus vedelikku asetatud kehale mõjuva üleslükkejõu kohta: $\vec{F}_ü = \rho\, gV\vec{k}$. Siin z-telje ühikvektor $\vec{k}$ on suunatud vertikaalselt üles, V on keha ruumala.

6.2. Ideaalse vedeliku hüdrodünaamika.

Vedeliku liikumisel võib igal mõtteliselt eraldatud elementaarruumalal olla oma, naaberruumaladest erinev kiirus ja kiirendus. Sellist liikumist nimetatakse voolamiseks. Voolavat vedelikku võib kujutada osakeste (kas nende elementaarruumalade või ka üksikute molekulide) kiirusvektori väljana. Kui välises taustsüsteemis fikseeritud suvalises ruumipunktis on mistahes ajahetkel sinna jõudnud vedelikuosakese kiirusevektor sama suuruse ja suunaga, on voolamine statsionaarne. Statsionaarses voolus on alati võimalik lõpmatult tihedalt kujutada jooni, millele vedelikuosakese kiiruse vektor on igas punktis puutujaks. Need on voolujooned, need on vedelikuosakeste trajektoorid; need ei saa lõikuda (miks?). Voolujoonte pildi abil saab igas ruumipunktis määrata vedelikuosakese kiirusevektori suuna; täiendav kokkulepe võimaldab määrata ka vektori mooduli: voolujooni kujutatakse nii tihedalt, et nendega ristuva pinna igat pindalaühikut läbib kiiruse mooduliga väärtusega (valitud ühikute süsteemis) võrdne arv voolujooni. Voolujoontest moodustatud seintega mõttelisi torukujulisi pindasid voolava vedeliku sees nimetatakse voolutorudeks. Voolutorud sarnanevad tõeliste tahkete seintega torudega – torusse sattunud vedelikuosake ei saa sealt külgseina kaudu väljuda (miks?).

Ideaalse vedeliku korral on lõpmata peenikese voolutoru mistahes ristlõikepinna kõikides punktides vedelikuosakeste kiirusevektor üks ja seesama ja suunatud piki voolutoru telge. Mittekokkusurutava vedeliku korral tuleneb siit voolu pidevuse võrrand: $\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1}$, kus v_1 ja v_2 on kiirused ristlõigetes pindaladega S_2 ja S_1. Võrrand kehtib ka lõplike mõõtmetega voolutorus, kui vaadeldavad ristlõiked on valitud voolutoru ühtlase ristlõikega osades, kus kiiruse profiil (vaadeldava ristlõikepinna kõigi punktide kiirusvektorite otspunktide poolt määratud pind) on tasane, s.t. et kiirus on ühtlane üle kogu ristlõikepinna. Sisuliselt tähendab pidevuse võrrand seda, et mittekokkusurutava vedeliku ruumkiirus Φ (ajaühikus läbivoolanud vedeliku ruumala) läbi voolutoru mistahes ristlõike on sama. Ruumkiiruse dimensioonvalem ja ühik: $[\Phi]=L^3T^{-1}$, $SI_\Phi=m^3/s$.

Ideaalse vedeliku korral muutub mingis vaadeldavas voolutorus liikuva väikese vedelikuhulga mehhaaniline koguenergia ainult rõhujõudude töö tõttu. Maa raskusjõu väljas voolava vedeliku korral väljendab seda Bernoulli võrrand: $\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = const$. Nende kolme liikme summa on sama voolutoru kõigi ristlõikepindade jaoks. Siin v ja p on kiirus ja rõhk vaadeldavas ristlõikes, ρ on vedeliku tihedus, g on raskuskiirendus ja h on vaadeldava ristlõikepinna kõrgus potentsiaalse energia nullnivoost (näit. maapinnast). Horisontaalse voolutoru korral jääb keskmine liige ära; esimest liiget nimetatakse ka dünaamiliseks rõhuks. Bernoulli võrrandist tuleneb Torricelli valem kõrguseni h täidetud anuma põhjas olevast väikesest avast välja voolava vedeliku kiiruse jaoks: $v = \sqrt{2gh}$; Bernoulli võrrandil põhineb pulverisaatori ja vee- ning õhujoapumba, samuti voolu kiiruse määramisel kasutatavate Pitot' ja Prandtli torude töö.

Pidevuse ja Bernoulli võrranditest järeldub, et ühtlase ristlõikepindalaga (voolu)torus on ideaalse vedeliku osakeste kiirus ja ka rõhk konstantsed kogu toru ruumala ulatuses. Siin vedeliku kihid ei liigu üksteise suhtes, vedelik liigub nagu üks tervik.

6.3. Viskoosse vedeliku hüdrodünaamika.

Reaalse (viskoosse e. püdela) vedeliku voolamisel tekib alati vedelikukihtide suhteline liikumine. Vedelik voolab mingis voolukanalis. Kanali seinte ja nende vahetus läheduses oleva vedelikukihi vastasmõju tulemusena aeglustub selle kihi liikumine (piirjuhul kleepub see seinte külge), see kiht pidurdab sisehõõrdejõududega naaberkihti jne. Pidurdamise mehhanism on küll vedelike ja gaaside korral erinev, kuid voolamise mehhaanika seisukohalt ei ole sel tähtsust. Vedelik laguneb nagu erineva kiirusega liikuvateks lõpmata õhukesteks kihtideks, sellist kihilist liikumist nimetatakse laminaarseks voolamiseks. Laminaarses voolus mõjutavad üksteise suhtes liikuvad naaberkihid lahutuspinna tüki pindalaga ΔS kaudu teineteist lahutuspinnaga paralleelsete vastassuunaliste sisehõõrdejõududega, mida saab arvutada Newtoni valemi abil: $F = \eta \frac{dv}{dy} \Delta S$. Siin kiiruse mooduli muutumise ruumiline kiirus on arvutatud kiirusevektoriga ja vaadeldava lahutuspinnaga ristuva y-telje suunas. Sisehõõrdetegur η näitab sisehõõrdejõudu kihtide lahutuspinna ühiku kohta tingimusel, et kiiruse mooduli muutumise ruumiline kiirus on võrdne ühikuga; selle dimensioonvalem: $[\eta]=L^{-1}MT^{-1}$; SI ühik: $SI_\eta=kg/(m\ s)$.

Voolujoone ja voolutoru mõisted säilitavad oma sisu ka reaalse vedeliku laminaarse voolu korral. Rõhk on ka siin voolutoru ristlõikepinna ulatuses konstantne, osakeste kiirus aga mitte. Kiiruse profiil oleneb voolukanali kujust. Pidevuse võrrand kehtib, kui selles kiiruse all mõista ruumkiiruse järgi keskmistatud kiirust: $\bar{v} = \frac{\Phi}{S}$. Bernoulli võrrand ei kehti, sest selle tuletamisel ei ole arvestatud dissipatiivset energiakadu, enamasti võib seda kasutada ligikaudsete hinnangute tegemisel. Rõhk vedelikus väheneb allavoolu, erinevalt ideaalsest vedelikust ka ühtlase ristlõikega voolutorus (miks?).

Ühtlase raadiusega R silindrilises torus on kiiruse profiil pöördparaboloid, mille teljeks on toru sümmeetriatelg: $v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2 - r^2)$, kus r on kaugus toru teljest. Kiirus on maksimaalne toru teljel: $v(0) = \frac{\Delta p}{4\eta l} R^2$. Siin Δp on rõhu muutus toru pikkuse l ulatuses. Selle valemi integreerimisel üle toru ristlõikepinna saadakse Poiseuille'i valem ruumkiiruse jaoks: $\Phi_V = \frac{\pi \Delta p}{8\eta l} R^4$. On näha, et toru läbilaskevõime sõltub väga järsult selle raadiusest. Viimane valem kehtib üldiselt ristlõikepinna mistahes kujuga torude korral, ainult kujutegur (silindri korral $\pi/8$) sõltub ristlõikepinna kujust ja selle iseloomuliku joonmõõtme (silindri korral R) valikust.

Vektorväljas (antud juhul vedelikuosakeste kiiruse vektori $\vec{v}$ väljas) üle suvalise kinnise kontuuri L arvutatud integraali: $\Gamma = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{s}$ nimetatakse tsirkulatsiooniks. Siin $d\vec{s}$ on elementaarnihe piki kontuuri. Kui $\Gamma=0$, nimetatakse välja <u>potentsiaalseks</u> e. keerisvabaks, kui $\Gamma\neq 0$, on tegemist <u>keerisväljaga</u>. Ideaalse vedeliku voolu kiiruse väli on enamasti potentsiaalne, viskoossel vedelikul aga keeriseline. Voolaval viskoossel vedelikul kui tervikul on suvalise punkti suhtes nullist erinev impulsimoment, selle vedeliku väikese ruumala liikumist võib vaadelda kui kulgliikumise ja pöörlemise summat, kusjuures pöörlemise telg ja nurkkiirus üldiselt muutuvad vedelikus punktist punkti liikudes.

Viskoosse vedeliku voolus kui olemuslikult keeriselises väljas on võimalik osakeste liikumine suletud trajektoore mööda – keeriste teke - ilma välise kesktõmbejõuta. Keerised tekivad näiteks voolu asetatud tõkete taga. Väikeste voolukiiruste korral sumbuvad keerised tõkke taga, teatud kaugusel tõkkest on vool jälle laminaarne. Voolu kiiruse suurenedes, antud kanalile iseloomuliku nn. kriitilise ruumkiiruse väärtusest alates muutub voolureþiim järsult: välismõjutuse poolt tekitatud keerised ei sumbu, vaid arenevad kogu voolukanalit täitvateks, kõikvõimaliku (voolukanali iseloomulikust mõõtmest mitte suurema) läbimõõduga keeristeks, mis tekivad juhuslikult ja jälle sumbuvad. Suvalises ruumipunktis muutub osakese kiirus juhuslikult nii suuruse kui suuna poolest. Sellist voolurežiimi nimetatakse <u>turbulentseks</u>. Turbulentses voolus on keskmised suurused statsionaarsed: igas ruumipunktis on $\bar{\vec{v}}$ ajas konstantne, keskmise kiiruse profiil on lamedam kui kiiruse profiil samas voolukanalis laminaarse voolu korral. Turbulentses voolus on dissipatiivsed energiakaod palju suuremad kui laminaarse voolu korral samas voolukanalis.

Suhtelise dissipatiivse energiakao hinnangu annab dimensioonitu suurus Reynoldsi arv: $\mathrm{Re} = \frac{l\rho \bar{v}}{\eta}$. Siin l on voolukanali iseloomulik joonmõõde (näit. silindrilise toru korral kas raadius või läbimõõt), ρ on vedeliku tihedus ja $\bar{v}$ on ruumkiiruse järgi leitud keskmine kiirus. Kui kerast mitte väga järsult erineva kujuga vedelikuhulk nihkub inertsi tõttu oma keskmise läbimõõdu võrra, siis selle vedeliku kineetilise energia W_k ja tema välispinnal mõjuvate sisehõõrdejõudude töö (st. W_k kao) suhe sellel nihkel ongi suurusjärgulise täpsusega võrdne Re-ga. Re on seega inertsi ja sisehõõrde nähtuste suhtelise osatähtsuse hinnanguks vedeliku voolamisel. Kui $1 \ll \mathrm{Re} \le \mathrm{Re}_{kr}$, on ülekaalus inerts ja on (ligikaudselt) kasutatav ideaalse vedeliku mudel. Re väikeste väärtuste korral on ülekaalus sisehõõre ja vool on laminaarne. Kui Re ületab oma kriitilise väärtuse antud voolukanali jaoks Re_{kr}, tekib vähimagi voolu häiriva välismõju korral turbulents. Sel juhul Re kaotab oma eelkirjeldatud füüsikalise sisu, sest sisehõõrdejõud tegutsevad intensiivselt ka vaadeldava vedelikuhulga sisemuses. Re on ka üks kuuest dimensioonitust sarnasuse kriteeriumist, mille väärtuste kokkulangemise korral vedeliku voolusid kahes voolukanalis võib lugeda hüdrodünaamiliselt sarnasteks ja kanda näiteks väikestel mudelitel tehtud katsete tulemusi üle suurtele süsteemidele.

Kui ülalmärgitud tingimusel on kasutatav ideaalse vedeliku mudel, siis voolukanali seinte läheduses on alati õhuke laminaarse voolureþiimiga piirkiht, mille ulatuses kiirus muutub seina pinnaga ristuvas sihis väga kiiresti. Suurtel, kriitilisele reþiimile lähedastel voolukiirustel võib piirkiht keerisena seinalt lahti rebeneda, kusjuures impulsimomendi jäävuse seaduse tõttu on voolukanali vastasseintelt rebenenud keerised vastassuunalised.

Viskoosne vedelik, erinevalt ideaalsest, mõjutab temas liikuvat (tema poolt uhutavat) keha kiirusele vastassuunalise frontaaltakistusjõuga, mis väikestel kiirustel, mil ei toimu piirkihi äärarebimist keha pinnalt, avaldub: $F_f = C\eta\, l v_o$, kus l on keha iseloomulik joonmõõde, v_0 on keha kiirus (lõpmata) kaugel asuva vedeliku suhtes, kuhu ei ulatu keha häiriv mõju vedeliku voolule. Konstant C on kujutegur, mida teoreetiliselt on õnnestunud hinnata vaid kera jaoks: $C = 6\pi$; frontaaltakistusjõu valem kera korral ($l = R$) kannab Stokesi valemi nime. Kiiruse v_0 suurte väärtuste korral rebeneb piirkiht keha tagumiselt pinnalt, keha taga tekib turbulentne “jälg”, F_f osutub võrdeliseks v_o ruuduga: $F_f' = C'\frac{\rho v_0^2}{2} S$, kus S on keha projektsiooni pindala kiirusega ristuval tasandil.

Kui vedelikus liikuv (uhutav) keha on ebasümmeetriline mõne tema massikeset läbiva, kiirusevektoriga paralleelse tasandi suhtes, siis tekib nii ideaalses kui ka viskoosses vedelikus selle tasandiga ristuv hüdrodünaamiline tõstejõud. Selle põhjuseks viskoosse vedeliku korral on ühesuunaliste keeriste rebenemine keha tagumiselt servalt; impulsimomendi jäävuse seaduse tõttu tekib keha ümber vastassuunaline ringvool, mis suurendab vedeliku kiirust keha suhtes ühel (ülal-) pool ja vähendab seda teisel (all-) pool keha. Siin ligikaudu kehtiva Bernoulli seaduse järgi tekib rõhuvahe keha külgedel, mis annabki tõstejõu.

KIRJANDUS

1. I. Saveljev Füüsika üldkursus.-Tallinn: Valgus, 1978. 1. k.- 398 lk.
2. M. Alonso, E.J. Finn Fundamental University Physics. Vol. I. Mechanics and Thermodynamics. - Addison-Wesley P.C., 1980. - 538 p.
3. Ä. Â. Ñèâóõèí Îáùèé êóðñ ôèçèêè.-Ì îñêâà: Íàóêà, 1974 (è ï îçäíèå).- Ò. 1.- 519 ñ