VEDELIKU SISEHÕÕRDETEGURI MÄÄRAMINE KETTA SUMBUVATEST PÖÖRDVÕNKUMISTEST

1. Tööülesanne

Uuritava vedeliku sisehõõrdeteguri (viskoossuse) määramine ketta sumbuvatest pöördvõnkumistest.

2. Töövahendid

Traadi külge riputatud metallketas, vann vedeliku jaoks, ringskaala, ajamõõtur, termomeeter, uuritav vedelik, etalonvedelik (destilleeritud vesi), puhastusvahendid.

3. Meetodi teooria

Raske metallketas ripub traadi otsas nii, et traadi telg (pöörlemistelg) läbib ketta masskeset (joon. 1). Ketas on varustatud osutiga. Osuti ja ringskaala abil määratakse pöördvõnkumiste nurkamplituude. Kui paigutada ketas vedelikku ja viia ta pöördvõnkumisse, siis vedeliku sisehõõrdejõudude toimel võnkumised sumbuvad. Sumbuva pöördvõnkumise diferentsiaalvõrrand on selline:

$$I\ddot{\varphi} = -D\varphi - r'\dot{\varphi}$$

ehk

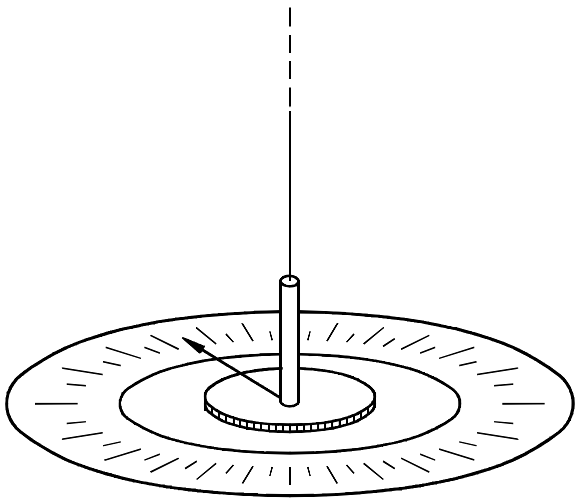
$$\ddot{\varphi} + 2\frac{r'}{2I}\dot{\varphi} + \frac{D}{I}\varphi = 0\,, \qquad (1)$$

kus φ, $\dot{\varphi}$ ja $\ddot{\varphi}$ on vastavalt nurkhälve, -kiirus ja -kiirendus,

I – vedelikus võnkuva ketta inertsimoment,

D – traadi keerdjäikus,

r' – hõõrdejõudude momendi tegur, mida mõõdetakse ühikulise nurkkiirusega pöörlevale kettale mõjuva hõõrdejõudude momendiga.



Joon. 1. Katseseade.

Võrrandi (1) lahend avaldub kujul

$$\varphi = \Phi_0 \exp(-\delta t)\sin(\omega t + \Psi) = \Phi(t)\sin(\omega t + \Psi), \qquad (2)$$

kus Φ_0 on algnurkamplituud,

$\omega = \sqrt{\dfrac{D}{I} - \dfrac{r'^2}{4I^2}}$ – võnkumiste ringsagedus,

Ψ – algfaas,

$\delta = \dfrac{r'}{2I}$ – sumbuvustegur,

$\Phi(t) = \Phi_0 \exp(-\delta t)$ – amplituud hetkel t.

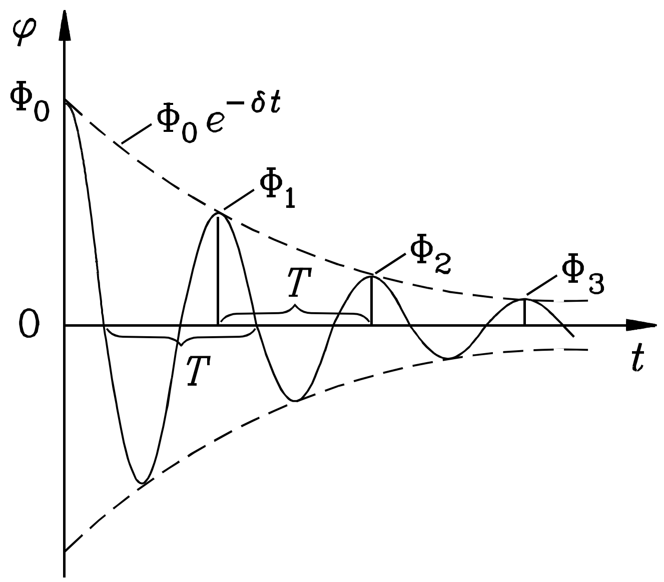
Ringsagedust ω võib avaldada järgmiselt:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{I} - \frac{r'^2}{4I^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\ , \qquad (3)$$

kus ω_0 tähendab võnkumiste ringsagedust sumbuvuse puudumisel.

Sumbuvusteguri pöördväärtust nimetatakse relaksatsiooniajaks $\tau = 1/\delta$. See on aeg, mille jooksul võnkumiste amplituud on vähenenud e = 2,718… korda.

Sumbuva võnkumise ajaline graafik on kujutatud joonisel 2, kus T on võnkeperiood.



Joon. 2. Sumbuva võnkumise graafik.

Sumbuvusteguri seostamiseks sisehõõrdeteguriga η on vaja leida teguri r' avaldis. Vastava hüdrodünaamika (Navier-Stokes'i) võrrandi lahendamisega saab leida vedeliku kiiruse u võnkuva ketta läheduses (u on ketta pinnaga paralleelne). Arvutades edasi kiiruse gradiendi du/dy ristsuunas ketta pinnaga vahetult ketta pinnal, saame ketta pinnaelemendile (pindala ΔS) mõjuva hõõrdejõu vastavalt Newtoni valemile

$$\Delta F = \eta \Delta S \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0} ,$$

kus y on ketta pinnaga ristsuunaline koordinaat.

Summeerides kõikidele ketta pinnaelementidele mõjuvad jõuelemendid, saame kogu kettale mõjuva hõõrdejõudude momendi r'. Eeldades, et hõõrdejõud on palju väiksem ketta inertsijõust, st et sumbumine on aeglane, ning mitte arvestades ketta silindrilist välispinda, saame

$$\delta = \frac{r'}{2I} = \frac{\sqrt{\omega\rho\eta}}{\sqrt{2}\,\rho_k h} , \tag{4}$$

kus ρ – vedeliku tihedus,

ρ_k – ketta tihedus,

h – ketta paksus.

Sumbuvate võnkumiste eksperimentaalsel uurimisel kasutatakse sageli sumbuvuse logaritmilise dekremendi mõistet, sest see suurus on eksperimendist lihtsalt määratav ja lihtsalt seotud teiste huvipakkuvate suurustega. Sumbuvuse logaritmiline dekrement on Θ on defineeritud kui kahe järjestikuse samasuunalise amplituudi suhte logaritm

$$\Theta = \ln \frac{\Phi(t)}{\Phi(t+T)} .$$

Logaritmilise dekremendi pöördväärtust nimetame võngete relaksatsiooni-arvuks

$$N = \frac{1}{\Theta} .$$

See on täisvõngete arv, mille jooksul võnkumise amplituud väheneb e korda.

Valemite (2) ja (4) abil leiame

$$\Theta = \delta T = \frac{\sqrt{\pi\rho\eta T}}{\rho_k h} . \tag{5}$$

Valem (5) ongi käesolevas töös põhivalemiks. Arvestades seda, et ka vedeliku puudumisel sumbuvad ketta võnkumised energiakadude tõttu traadis (õhu hõõrdumise mõju on tunduvalt väiksem), võime vastava paranduse sisse viia, lahutades võrduse (5) vasakust poolest õhus mõõdetud dekremendi $\Theta_õ$. Vedeliku sisehõõrdetegur avaldub siis valemiga

$$\eta = \frac{\rho_k^2 h^2 (\Theta - \Theta_õ)^2}{\pi\rho T} . \tag{6}$$

Valemit (6) võiks kasutada otseselt, kuid et tema tuletamisel on tehtud lihtsustavaid eeldusi (näiteks silindrilise pinna mittearvestamine), eelistame võrdlus-meetodit, et saada täpsemaid tulemusi. Selleks määrame Θ nii tuntud kui ka tundmatu vedeliku jaoks. Tuntud (etalon-) vedeliku iseloomustussuurused varustame indeksiga e. Tundmatu vedeliku sisehõõrdeteguri jaoks saame valemi

$$\eta = \frac{\rho_e T_e (\Theta - \Theta_õ)^2}{\rho T (\Theta_e - \Theta_õ)^2} \eta_e \ . \qquad (7)$$

Tundmatuks vedelikuks võib olla ka sama vedelik erineval temperatuuril.

4. Sumbuvuse logaritmilise dekremendi optimaalsest määramisest

Sumbuvuse logaritmilise dekremendi määramisel kahe naaberamplituudi abil ei pruugi määramatus sugugi minimaalne olla võrreldes mitme amplituudi kasutamisega. Tuletame Θ valemi üldisema juhu jaoks, kui pole tegemist naaberamplituudidega. Nummerdame samasuunalisi amplituude indeksitega 0, 1, 2, …, n. Loomulikult

$$\frac{\Phi_0}{\Phi_1} = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \ldots = \frac{\Phi_{n-1}}{\Phi_n} = \exp(\Theta) \ .$$

Ühtlasi

$$\frac{\Phi_0}{\Phi_2} = \exp(2\Theta);\ldots;\ \frac{\Phi_0}{\Phi_n} = \exp(n\Theta) \ . \qquad (8)$$

Seega

$$\Theta = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{\Phi_0}{\Phi_n}\right). \qquad (9)$$

Algamplituudi Φ_0 võime suvaliselt valida, Φ_1 võime lugeda Φ_0-iks jne.

Nüüd püüame määrata optimaalse arvu n, et Θ mõõtemääramatus oleks minimaalne. Leiame kõigepealt Θ liitmääramatuse

$$u_c(\Theta) = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{u^2(\Phi_0)}{\Phi_0^2} + \frac{u^2(\Phi_n)}{\Phi_n^2}}$$

Amplituudi määramatus ilmselt ei sõltu amplituudi väärtusest, $u(\Phi_n) = u(\Phi_0)$ ja

$$u_c(\Theta) = \frac{1}{n} u(\Phi_0)\sqrt{\frac{1}{\Phi_0^2} + \frac{1}{\Phi_n^2}} \ .$$

Kasutades valemit (8) avaldame Φ_n Φ_0 kaudu ja

$$u_c(\Theta) = \frac{u(\Phi_0)}{n\,\Phi_0}\sqrt{1 + \exp(2n\Theta)} \ . \qquad (10)$$

Optimaalse n leidmiseks tuleks lahendada ekstreemumülesanne, võrrutades $u_c(\Theta)$ esimese tuletise n järgi nulliga. Jättes ära konstantsed kordajad, saame ekstreemumi tingimuseks

$$n_m\Theta = \exp(-2n_m\Theta)+1 \ .$$

Seda võrrandit ei ole õnnestunud analüütiliselt lahendada. Numbriline lahendus annab ligikaudseks tulemuseks $n_m\Theta = 1{,}11$ ehk

$$n_m = \frac{1{,}11}{\Theta} = 1{,}11N \ . \tag{11}$$

Optimaalseks n väärtuseks n_m tuleks võtta valemi (11) abil leitud arvule lähim täisarv. Otstarbekas on arvatavasti juba võngete registreerimise käigus määrata paras võngete arv, ilma et me dekrementi Θ veel teaks. Selleks avaldame valemitest (8) ja (11) optimaalsele võngete arvule n_m vastava amplituudide suhte

$$\frac{\Phi_0}{\Phi_{n_m}} = \exp(n_m\Theta) \approx 3 \ ,$$

st optimaalne on võngete arv siis kui amplituud on vähenenud 3 korda. Täpsuse tõstmiseks võtame arvutuse aluseks suuremal arvul amplituudide paare (Φ_0 , Φ_{n_m}), (Φ_1 , Φ_{n_m+1}) jne.

Siin tuleks leida kaalutud keskväärtus, kuna iga järgneva amplituudide paariga läheb Θ määramatus $\exp(\Theta)$ korda suuremaks. Et see aga tavaliselt oluliselt ei erine harilikust keskväärtusest, piirdume töö põhivariandis viimasega.

Kuidas avaldub Θ minimaalne määramatus ühe amplituudide paari korral kui me oleme kasutanud n_m? Valemitest (7), (9), (10) ja ekstreemumi tingimusest saame

$$u_c(\Theta)_{\min} = \frac{\Delta\Phi_0}{\Phi_0}\exp(n_m\Theta) = 3\frac{\Delta\Phi_0}{\Phi_0} = \frac{\Delta\Phi_0}{\Phi_{n_m}} \ . \tag{12}$$

5. Töö käik

1. Vajaduse korral puhastame traadi otsas rippuva ketta sooladest ja rasvajäätmetest piirituse, atsetooni või bensiini abil. Hoiame seejuures ketast ettevaatlikult võllist.

Tekitame väikese amplituudiga pöördvõnkumisi (umbes 20°) ja määrame võnkeperioodi õhus $T_õ$ 10 täisvõnke aja järgi.

2. Tekitame eriseadme abil pöördvõnkumisi amplituudiga kuni 20°. Harjutame skaalalt lugemist. Määrame tasakaaluasendi.

3. Paneme jällegi ketta võnkuma mõõduka amplituudiga. Registreerime osuti ühepoolsed äärmised asendid a_0 , a_1 , a_2 , …, a_m . Õhus võnkumisel ei püüa me oodata, kuni amplituud väheneb 3 korda, vaid piirdume orienteeruvalt 25 võnkega. Seejärel seiskame ettevaatlikult ketta ja määrame uuesti tasakaaluasendi $\bar{a}$. Amplituudid määrame $\Phi_0 = a_0 - \bar{a}$, $\Phi_1 = a_1 - \bar{a}$ jne. Soovitav on teha tabel

i	a_i	Φ_i	Φ_i / Φ_{k+i}	$\Theta_õ$
0				
1				
2				
.				
k				
.				
m				

$\Theta_õ$ väärtustest leiame aritmeetilise keskmise; k tuleks valida nii, et $\Theta_õ$ keskväärtuse määramatus oleks minimaalne. See analüüs on suhteliselt keerukas; käesoleval juhul on k optimaalseks väärtuseks orienteeruvalt $k \approx 0.7\ m$.

4. Täidame anuma etalonvedelikuga (destilleeritud vesi), mõõdame selle temperatuuri. Laseme ketta vedelikku, anuma keskele. Viime läbi samasugused mõõtmised kui punktis 3, kuid nüüd laseme kettal võnkuda niikaua, kuni amplituud (tasakaaluasendi suhtes) on vähenenud vähemalt 10 korda. Seeria lõpus määrame täpselt tasakaaluasendi $\bar{a}$. Tabeli päis näeks välja järgmiselt

i	a_i	Φ_i	Φ_i / Φ_{n_m+i}	Θ_e

n_m määrame Φ_i-de abil, so võnke numbriga, mille juures amplituud on vähenenud ligikaudu 3 korda.

Leiame võimalikult palju suhteid Φ_0 / Φ_{n_m}, Φ_1 / Φ_{n_m+1} jne, aga mitte üle 10. Leiame jällegi Θ_e aritmeetilise keskmise.

5. Määrame ketta võnkeperioodi T_e . Selleks mõõdame suurema arvu, näiteks 10 täisvõnke sooritamiseks kulunud aja. Kontrollime ühe täisvõnkega, kas pole ekset.

6. Kordame punktides 4 ja 5 kirjeldatud mõõtmisi uuritava vedelikuga või sama vedelikuga erineval temperatuuril.

7. Arvutame uuritava vedeliku sisehõõrdeteguri valemist (7). Märgime juurde temperatuuri ja termomeetri põhivea.

8. Arvutame veel sumbuvustegurid δ_e ja δ , relaksatsiooniajad τ_e ja τ ning relaksatsiooniarvud N_e ja N .

6. <u>Metoodilisi ja metroloogilisi juhiseid</u>

B-tüüpi määramatuse üheks komponendiks on lähtevõrrandite (1) ja (4) ning konkreetse katseseadme mittevastavus. On soovitav analüüsida, milles võiks see mittevastavus konkreetselt seisneda.

Ülalkirjeldatud arvutusmeetodi puhul on analüüsitud optimaalse võngete arvu valikut, et saavutada minimaalset sumbuvusteguri määramatust. Määramatus tuleb, muide, seda väiksem, mida suurem on algamplituud. Kuid amplituudi ei või liiga suurena võtta, sest siis tekib kõrvalekaldumisi Hooke'i seadusest traadi deformatsioonil ja mõeldav on ka vedeliku inertsi suurem mõju; seda inertsi võrrand (1) ei arvesta. Soovitame võtta algamplituudi orienteeruvalt 90°.

A-tüüpi määramatust saab ilmselt oluliselt vähendada keskväärtuse leidmisega. Θ keskväärtuse usalduspiirid (95% nivoo juures) võiks määrata märgitesti järgi [3, p. 35.4], kuigi siin jääb arvestamata tulemuste mittevõrdtäpsus.

Aja mõõtmisel elektrilise sekundkellaga tuleb kindlasti mõõta võrgusagedust, vähemalt kahel korral vähemalt pooletunnise vahega. Määramatuse hindamiseks on soovitav tuletada meelde juhiseid aja ja võnkeperioodi mõõtmiseks kogumikust "Mehaanikapraktikumi tööjuhendid I" [6].

Et vedeliku viskoossus sõltub tugevasti temperatuurist, tuleb ka temperatuuri mõõtmisele täit tähelepanu osutada.

Etalonvedeliku sisehõõrdetegur η_e tuleks leida graafilise või numbrilise interpolatsiooniga tabeli andmetest.

7. Lisaülesanded

7.1. Enne praktikumi

1. Milline on η mõõtühik SI-süsteemis?
2. Selgitada sumbuva pöördvõnkumise diferentsiaalvõrrandi kõigi liikmete füüsikalist tähendust.
3. Millised on suuruste I , D ja r' dimensioonid?
4. Kuidas avaldub kriitiline sumbuvustegur, mille juures võnkumine läheb üle aperioodiliseks?

7.2. Pärast praktikumi

1. Arvutada kriitiline δ väärtus antud seadme puhul, mille juures võnkumine muutub aperioodiliseks liikumiseks, lugedes võnkumisi õhus praktiliselt sumbumatuiks.
2. Arvutada η valemi (6) järgi.
3. Arvutada η täpsema valemi järgi, milline arvestab ka kaasahaaratava vedeliku inertsi
$$\eta = \frac{\rho_e T_e \left(\Theta(1+\Theta/\pi) - \Theta_õ\right)^2}{\rho T \left(\Theta_e(1+\Theta_e/\pi) - \Theta_õ\right)^2} \eta_e \ .$$
4. Hinnata ketta poolt kaasahaaratava vedelikukihi paksust
$$y_\delta \approx \sqrt{\frac{\eta T}{2\pi\rho}} \ .$$
5. Hinnata ligikaudselt mõõtmiseks vajaminevat vedeliku ruumala.

Kirjandus

1. I. Saveljev. Füüsika üldkursus I. “Valgus”, Tallinn, 1978.
2. A.K. Kikoin, I.K. Kikoin. Molekulaarfüüsika (vene k.). Moskva, 1976, lk. 171–173, 177–179.
3. H. Tammet. Füüsika praktikum. Metroloogia. Tallinn, 1971.
4. J.P. Subbotina. Füüsikaliste konstantide ja parameetrite kogumik (vene k.). Leningrad, Leningradi Riikliku Ülikooli Kirjastus, 1967.
5. A.N. Matvejev. Molekulaarfüüsika (vene k.). Moskva, 1987, lk. 342–343.
6. Mehhaanikapraktikumi tööjuhendid I, Koost. E. Tamm, Tartu, 1988, lk. 5–7.
7. Mõõtemääramatuse väljendamise juhend, Riigi Metroloogiakeskus, Tartu, 1996.
8. T. Plank, Füüsikaliste mõõtmiste alused. Loengukonspekt. 3. trükk, Tartu, 2000.
9. http://www.physic.ut.ee/instituudid/efti/loengumaterjalid/fmalused/konts1e.html#p3

Koostanud: J. Salm